Umraðanir í Collatz-ferlinu

Fyrirlestur á ráðstefnu Íslenska stærðfræðafélagsins í Reykholti

Michael Albert, Bjarki Guðmundsson, Henning Úlfarsson

Otago Háskólinn, Háskólinn í Reykjavík

13. Október, 2013

Efnisyfirlit

1. Collatz-ferlið
2. Áhugaverðir eiginleikar
3. Auka umraðanir
4. Næstu skref

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n
8	4	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n
8	4	n
4	2	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n
8	4	n
4	2	n
2	1	n

Collatz-ferlið

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ef } x \equiv 0 \pmod 2 \\ 3x+1 & \text{ef } x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n
8	4	n
4	2	n
2	1	n
1		

Collatz-tilgátan

Tilgátan

Collatz-ferlið endar á 1 fyrir hvaða upphafstölu sem er

Collatz-tilgátan

Tilgátan

Collatz-ferlið endar á 1 fyrir hvaða upphafstölu sem er

- Sett fram af Lothar Collatz árið 1937
- Margir búnir að reyna, enn óleyst
- Búið að athuga fyrir allar tölur upp að $5 \times 2^{60} \approx 5.764 \times 10^{18}$

Upphafsumröðunin

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5	16	u
16	8	n
8	4	n
4	2	n
2	1	n
1		

Losum okkur við veldi af 2.

Upphafsumröðunin

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5		

Losum okkur við veldi af 2.

Upphafsumröðunin

x	$f(x)$	skref
12	6	n
6	3	n
3	10	u
10	5	n
5		

Losum okkur við veldi af 2. Þetta eru allt mismunandi tölur svo við getum breytt listanum í umröðun.

Upphafsumröðunin

$$12 \quad 6 \quad 3 \quad 10 \quad 5$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Upphafsumröðunin

$$\begin{matrix} 12 & 6 & 3 & 10 & 5 \\ & & 1 & & \end{matrix}$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Upphafsumröðunin

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 6 & 3 & 10 & 5 \\ & & 1 & & 2 \end{array}$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Upphafsumröðunin

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 6 & 3 & 10 & 5 \\ & 3 & 1 & & 2 \end{array}$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Upphafsumröðunin

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 6 & 3 & 10 & 5 \\ & 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Upphafsumröðunin

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 6 & 3 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Setjum 1 í stað minnstu tölunnar (3), 2 í stað næstminnstu tölunnar (5), o.s.frv.

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

Hversu margar?

Með tölvuprófunum fást eftirfarandi gögn, sem gefa neðri mörk á réttan fjölda mismunandi umraðana sem fást á þennan hátt.

k	fjöldi
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

- Dæmigerð aðgerðaröð $nunnunun$

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

- Dæmigerð aðgerðaröð $nunnunun$
- Innihalda aldrei uu, því eftir u fæst slétt tala og því kemur næst n-skref

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

- Dæmigerð aðgerðaröð $nunnunun$
- Innihalda aldrei uu, því eftir u fæst slétt tala og því kemur næst n-skref
- Þær enda alltaf á n því halinn var klipptur af (vantar síðasta u-skrefið inn í halann)

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

- Dæmigerð aðgerðaröð $nunnunun$
- Innihalda aldrei uu, því eftir u fæst slétt tala og því kemur næst n-skref
- Þær enda alltaf á n því halinn var klipptur af (vantar síðasta u-skrefið inn í halann)
- Því eru $\text{fib}(k+1)$ mögulegar aðgerðaraðir af lengd k

Mögulegar aðgerðaraðir

Af hverju Fibonacci-tölurnar?

- Dæmigerð aðgerðaröð $nunnunun$
- Innihalda aldrei uu, því eftir u fæst slétt tala og því kemur næst n-skref
- Þær enda alltaf á n því halinn var klipptur af (vantar síðasta u-skrefið inn í halann)
- Því eru $\mathrm{fib}(k+1)$ mögulegar aðgerðaraðir af lengd k

Þurfum því að sýna að hver möguleg aðgerðaröð sé lögleg

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

$$U(X) = (X - 1)/3$$

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

$$U(X) = (X - 1)/3$$
$$NU(X) = (2X - 2)/3$$

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

$$U(X) = (X - 1)/3$$
$$NU(X) = (2X - 2)/3$$
$$UNU(X) = (2X - 5)/9$$

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

$$\begin{aligned}
U(X) &= (X-1)/3 \\
NU(X) &= (2X-2)/3 \\
UNU(X) &= (2X-5)/9 \\
NUNU(X) &= (4X-10)/9 \\
UNUNU(X) &= (4X-19)/27 \\
NUNUNU(X) &= (8X-38)/27 \\
NNUNUNU(X) &= (16X-76)/27 \\
UNNUNUNU(X) &= (16X-103)/81 \\
NUNNUNUNU(X) &= (32X-206)/81
\end{aligned}$$

Horft frá halanum

Stakið í halanum er $X = 2^x$. Látum $N = n^{-1}$, $U = u^{-1}$ og vinnum áfram með aðgerðaröðina $nunnunun$:

$$
\begin{aligned}
U(X) &= (X - 1)/3 \\
NU(X) &= (2X - 2)/3 \\
UNU(X) &= (2X - 5)/9 \\
NUNU(X) &= (4X - 10)/9 \\
UNUNU(X) &= (4X - 19)/27 \\
NUNUNU(X) &= (8X - 38)/27 \\
NNUNUNU(X) &= (16X - 76)/27 \\
UNNUNUNU(X) &= (16X - 103)/81 \\
NUNNUNUNU(X) &= (32X - 206)/81
\end{aligned}
$$

X þarf því að uppfylla $32X = 206 \bmod 81$, eða $X = 52 \bmod 81$

Almenna skilyrðið

- Nú var $X = 2^x$ svo við fáum $2^x = 52 \bmod 81$

Almenna skilyrðið

- Nú var $X = 2^x$ svo við fáum $2^x = 52 \bmod 81$
- Almennt fæst jafna á forminu $2^x = c \bmod 3^y$ sem hefur alltaf lausn því 2 er frumstæð rót mátað við 3^y fyrir öll y

Almenna skilyrðið

- Nú var $X = 2^x$ svo við fáum $2^x = 52 \bmod 81$
- Almennt fæst jafna á forminu $2^x = c \bmod 3^y$ sem hefur alltaf lausn því 2 er frumstæð rót mátað við 3^y fyrir öll y

Þar með eru allar mögulegar aðgerðaraðir löglegar og við fáum því eina umröðun úr hverri

Almenna skilyrðið

- Nú var $X = 2^x$ svo við fáum $2^x = 52 \bmod 81$
- Almennt fæst jafna á forminu $2^x = c \bmod 3^y$ sem hefur alltaf lausn því 2 er frumstæð rót mátað við 3^y fyrir öll y

Þar með eru allar mögulegar aðgerðaraðir löglegar og við fáum því eina umröðun úr hverri, a.m.k. ...

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$
10	55	55
11	89	89

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\text{fib}(k)$
10	55	55
11	89	89
12	144	144

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$
10	55	55
11	89	89
12	144	144
13	233	233

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$
10	55	55
11	89	89
12	144	144
13	233	233
14	377	377

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\text{fib}(k)$
10	55	55
11	89	89
12	144	144
13	233	233
14	377	377
15	611	610

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\text{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3
19	4185	4181	4

Lengri umraðanir

k	fjöldi	fib(k)	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3
19	4185	4181	4
20	6771	6765	6

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\mathrm{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3
19	4185	4181	4
20	6771	6765	6
21	10953	10946	7

Lengri umraðanir

k	fjöldi	$\text{fib}(k)$	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3
19	4185	4181	4
20	6771	6765	6
21	10953	10946	7
22	17720	17711	9

Lengri umraðanir

k	fjöldi	fib(k)	auka
10	55	55	
11	89	89	
12	144	144	
13	233	233	
14	377	377	
15	611	610	1
16	989	987	2
17	1600	1597	3
18	2587	2584	3
19	4185	4181	4
20	6771	6765	6
21	10953	10946	7
22	17720	17711	9
23	28669	28657	12

Línurnar

Lítum aftur á

$$\begin{aligned}
U(X) &= (X-1)/3 \\
NU(X) &= (2X-2)/3 \\
UNU(X) &= (2X-5)/9 \\
NUNU(X) &= (4X-10)/9 \\
UNUNU(X) &= (4X-19)/27 \\
NUNUNU(X) &= (8X-38)/27 \\
NNUNUNU(X) &= (16X-76)/27 \\
UNNUNUNU(X) &= (16X-103)/81 \\
NUNNUNUNU(X) &= (32X-206)/81
\end{aligned}$$

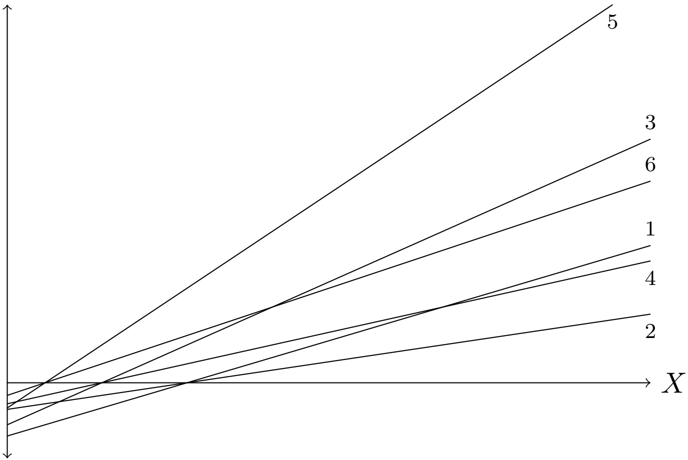
Línurnar

Lítum aftur á

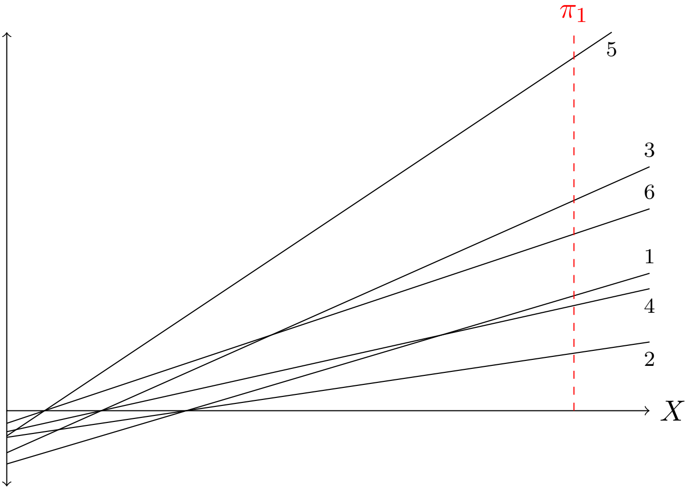
$$\begin{aligned}
U(X) &= (X-1)/3 \\
NU(X) &= (2X-2)/3 \\
UNU(X) &= (2X-5)/9 \\
NUNU(X) &= (4X-10)/9 \\
UNUNU(X) &= (4X-19)/27 \\
NUNUNU(X) &= (8X-38)/27 \\
NNUNUNU(X) &= (16X-76)/27 \\
UNNUNUNU(X) &= (16X-103)/81 \\
NUNNUNUNU(X) &= (32X-206)/81
\end{aligned}$$

Sjáum að þetta eru línur

Línurnar

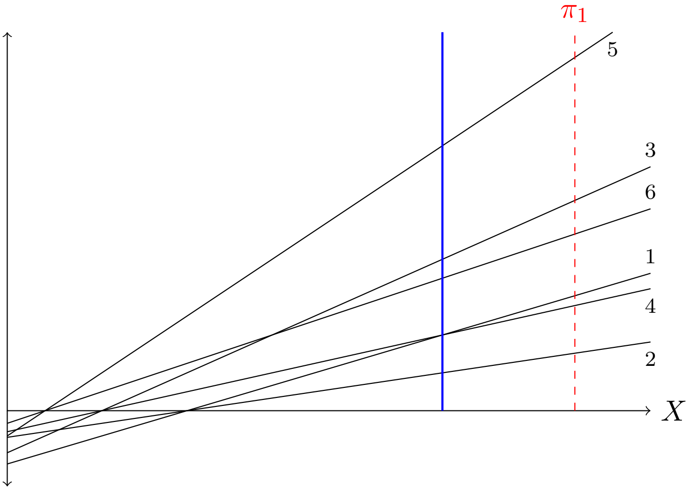


Línurnar



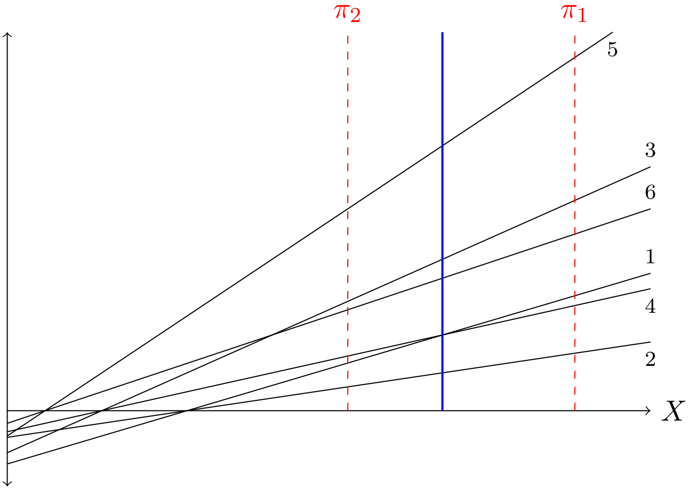
Röðin á línunum ákvarðar umröðunina.

Línurnar



Röðin á línunum ákvarðar umröðunina. Skurðpunktar breyta röðinni. Eftir stærsta skurðpunkt breytist umröðunin ekki.

Línurnar



Röðin á línunum ákvarðar umröðunina. Skurðpunktar breyta röðinni. Eftir stærsta skurðpunkt breytist umröðunin ekki.

Lausnir innan stærsta skurðpunktar

Lausnir á $2^x = c \bmod 3^y$, fyrir ákveðna aðgerðaröð, gefa af sér umraðanir.

- Alltaf til lausn utan við stærsta skurðpunkt
- Á milli samliggjandi skurðpunkta gæti verið lausn, þannig fást ólíkar umraðanir
- Þetta gerist fyrst fyrir aðgerðaröð af lengd 14

Fyrsta auka umröðunin

- Aðgerðaröðin $unnununununnunnn$ gefur okkur skilyrðið

$$2^x = 16 \mod 729$$

Fyrstu tvær lausnirnar eru $x = 4$ og $x = 490$

Fyrsta auka umröðunin

- Aðgerðaröðin $unnununununnunnn$ gefur okkur skilyrðið

$$2^x = 16 \bmod 729$$

Fyrstu tvær lausnirnar eru $x = 4$ og $x = 490$
  - Lausnin $x = 4$ samsvarar ferli sem endar á 2^4

Fyrsta auka umröðunin

- Aðgerðaröðin *unnununununnunnn* gefur okkur skilyrðið

$$2^x = 16 \bmod 729$$

Fyrstu tvær lausnirnar eru $x = 4$ og $x = 490$

  - Lausnin $x = 4$ samsvarar ferli sem endar á 2^4
  - Lausnin $x = 490$ samsvarar ferli sem endar á 2^{490}

Fyrsta auka umröðunin

- Aðgerðaröðin $unnununununnunnn$ gefur okkur skilyrðið

$$2^x = 16 \bmod 729$$

  Fyrstu tvær lausnirnar eru $x = 4$ og $x = 490$
  - Lausnin $x = 4$ samsvarar ferli sem endar á 2^4
  - Lausnin $x = 490$ samsvarar ferli sem endar á 2^{490}
- Stærsti skurðpunktur er $\approx 44{,}05$ og því fást mismunandi umraðanir:

1	4	9	14	6	11	15	8	13	5	10	2	7	12	3
1	3	9	14	6	11	15	8	13	5	10	2	7	12	4

Hversu margar auka

- Núverandi gögn gefa okkur að aukafjöldinn er u.þ.b.

$$\sqrt{\text{fib}(k-11)} \text{ fyrir } k \geq 15$$

Hversu margar auka

- Núverandi gögn gefa okkur að aukafjöldinn er u.þ.b.

$$\sqrt{\mathrm{fib}(k-11)} \text{ fyrir } k \geq 15$$

- Þegar aukaumröðun finnst þá gefur hún af sér óendanlega margar nýjar í lengri lengdum (keðjur og fjölskyldur)

Hversu margar auka

- Núverandi gögn gefa okkur að aukafjöldinn er u.þ.b.

$$\sqrt{\text{fib}(k-11)} \text{ fyrir } k \geq 15$$

- Þegar aukaumröðun finnst þá gefur hún af sér óendanlega margar nýjar í lengri lengdum (keðjur og fjölskyldur)
- Mjög gróft efra mark er $k^2\text{fib}(k)$

Hversu margar auka

- Núverandi gögn gefa okkur að aukafjöldinn er u.þ.b.

$$\sqrt{\mathrm{fib}(k-11)} \text{ fyrir } k \geq 15$$

- Þegar aukaumröðun finnst þá gefur hún af sér óendanlega margar nýjar í lengri lengdum (keðjur og fjölskyldur)
- Mjög gróft efra mark er $k^2\mathrm{fib}(k)$
- Með því að finna efra mark á skurðpunktana má endurbæta þetta í $(k+1)\mathrm{fib}(k)$

Uppbygging o.fl.

- Vitum lítið um uppbyggingu umraðananna

Uppbygging o.fl.

- Vitum lítið um uppbyggingu umraðananna
- Einnig væri gaman að rannsaka svipuð ferli, t.d. $n' = n, u' = un$.

Spurningar?